TEORIA DEI SEGNALI B – PRIMO COMPITINO

SEGNALI NOTEVOLI

- Segnali pari e/o dispari: ogni segnale $x(t)$ si può scrivere come la somma della sua parte pari $x_P(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$ e la sua parte dispari $x_D(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big)$
- Energia su un intervallo: $E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt$ - Potenza su un intervallo: $P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt$

IMPULSO DI DIRAC

- Proprietà di campionamento: $\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau = y(t_0)$

RISPOSTA IMPULSIVA h(t)

$h(t) = y(\delta(t))$.

PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE: SISTEMI IN CASCATA E IN PARALLELO

- Cascata: $\mathrm{h}(t) = h_1(t) * h_2(t)$, $H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$.
- Parallelo: $\mathrm{h}(t) = h_1(t) + h_2(t)$, $H(f) = H_1(f) + H_2(f)$.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO H(f)

$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$. Essendo una funzione complessa, posso scriverla come $H(f) = A_H(f)e^{j\varphi_{H(f)}}$, cioè attraverso modulo e fase.

SERIE DI FOURIER → $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$

COEFFICIENTI DI FOURIER

$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$. Per k=0 si ha la componente continua, cioè il valor medio temporale del segnale.

$x_k(t) = X_k \cdot e^{2\pi k f_0 t} \rightarrow y_k(t) = x_k(t) * h(t) = H(kf_0) \cdot X_k e^{2\pi k f_0 t}$ $\qquad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) \cdot X_k e^{2\pi k f_0 t}$

TRASFORMATA DI FOURIER	SE x(t) PERIODICO	ANTITRASFORMATA DI FOURIER
$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$	$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi f t}\, df$

PROPRIETÀ

$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$ $\qquad A_Y(f) = A_X(f) \cdot A_H(f)$ $\qquad \varphi_Y(f) = \varphi_X(f) + \varphi_H(f)$ $\qquad \boxed{y(t) = H(f_0) \cdot x(t)}$

Se $H(f)$ Hermitiana (spettro ampiezza pari, spettro fase dispari; $X_k = X_k^*$ $X(f) = X^*(f)$) → $h(t)$ reale → fase nulla.

$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(f) \xleftrightarrow{(dualit\grave{a})} X(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} x(-f)$ $\qquad Ax(t) \xleftrightarrow{(linearit\grave{a})\,\mathcal{F}} A \cdot X(f)$ $\qquad x\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{(cambiamento\ \ di\ scala)\,\mathcal{F}} |T| \cdot X(Tf)$

$x(t - t_0) \xleftrightarrow{(traslazione\ \ temporale)\,\mathcal{F}} X(f)e^{-j2\pi f t_0}$ $\qquad x(t + t_0) \xleftrightarrow{(traslazione\ \ temporale)\,\mathcal{F}} X(f)e^{j2\pi f t_0}$

$x(t)\ pari \leftrightarrow X(-f) = X(f)$ $\qquad x(t)\ dispari \leftrightarrow X(-f) = -X(f)$ $\qquad x(t) reale\ pari \leftrightarrow X(f)\ reale\ pari$

$x(t)\ reale\ dispari \leftrightarrow X(f)\ immaginario\ dispari$

RELAZIONE DI PARSEVAL

La potenza media di un segnale periodico è pari a $P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2$. Sinusoide → $P = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A}{2}$

FORMULE UTILI SU TRASFORMATE E NON

DOMINIO DEL TEMPO	DOMINIO DELLA FREQUENZA	COMMENTO
$A \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$A \cdot T \cdot sinc(f \cdot T)$	Rect di durata T
$A \cdot e^{-Bt} \cdot u(t)$	$\frac{A}{B + j2\pi f}$	Esponenziale unilatero
$A \cdot \Lambda\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right)$	$A \cdot T \cdot sinc^2(f \cdot T)$	Triangolo di durata 2T
$A \cdot \delta(t)$	$X(f) = A$	Delta di Dirac
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$	Delta centrata in t_0
$e^{j2\pi f_0 t)}$	$\delta(f - f_0)$	Trasformata fasore
$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left(X(f - f_0) + X(f + f_0)\right)$	Teorema della modulazione
$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$	Trasformata coseno
$\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}\right)$	$\frac{1}{2j}\left(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right)$	Trasformata seno

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ $\quad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$ $\quad z = a + jb = \rho e^{j\theta}$

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$\cos a + \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$